Sistemas Automáticos

Modelado de sistemas

D. Tardioli, R. Martínez
Centro Universitario de la Defensa
Academia General Militar
A. A. 2016/2017

Índice

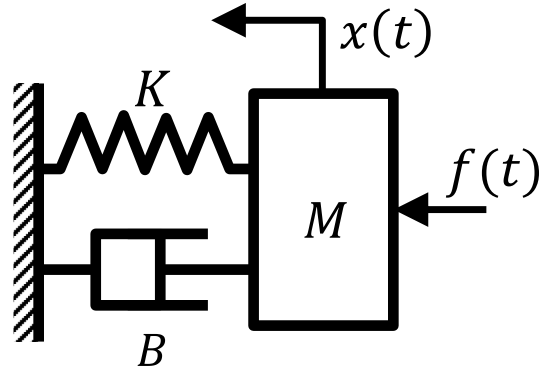
- Obtención de modelos
- **Modelado** de sistemas
  - Sistemas mecánicos **traslacionales**
  - Sistemas mecánicos **rotacionales**
  - Sistemas **eléctricos**
  - **Motor** de corriente continua
- Función de transferencia
- Representación mediante **diagramas de bloques**

Objetivos del tema

- Obtención de las **ecuaciones diferenciales** que modelan el sistema
- Definición de **función de transferencia** y de sus propiedades fundamentales
- Obtención la función de transferencia
- Interpretación de **diagramas de bloques**
- Simplificación de diagramas de bloques para obtener la **función de transferencia** entre **una** entrada y **una** salida

Proceso de control de un sistema

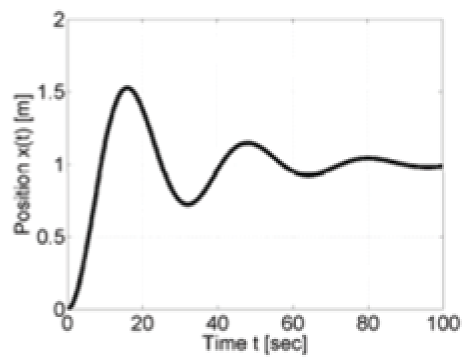
- **Modelado**



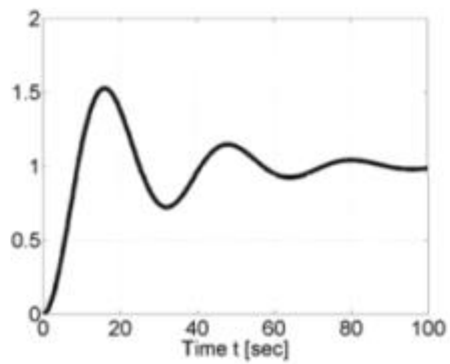
$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

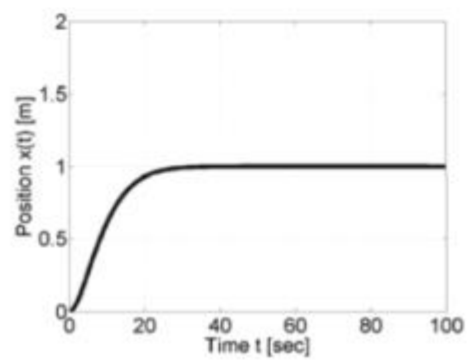
- **Análisis**

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$



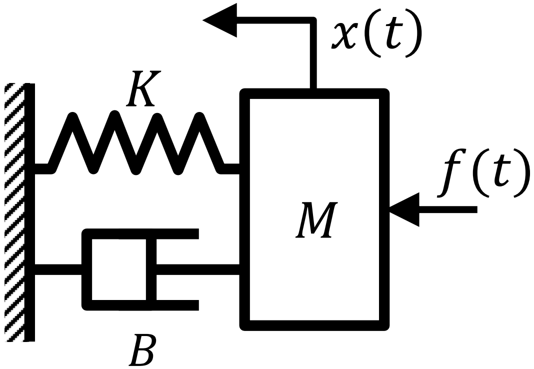
- **Control**





Proceso de control de un sistema

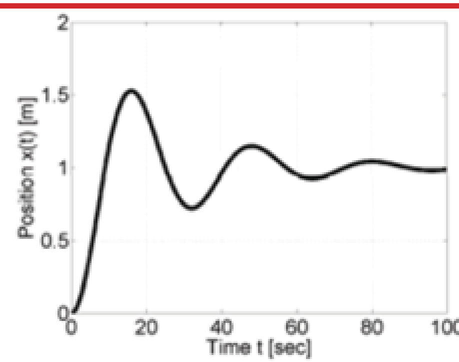
- **Modelado**



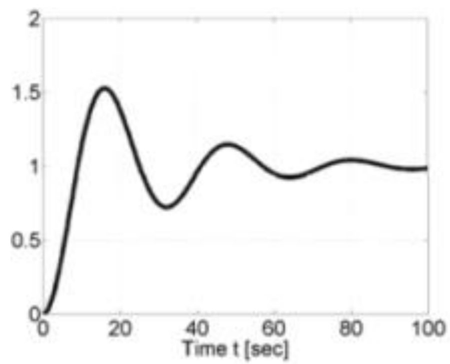
$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

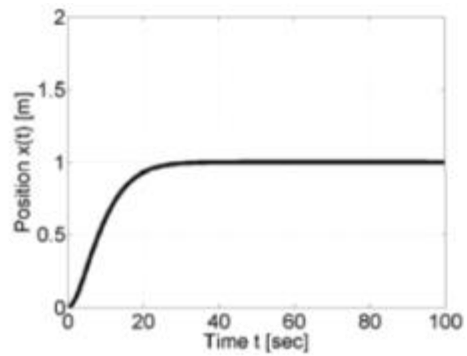
- **Análisis**

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$



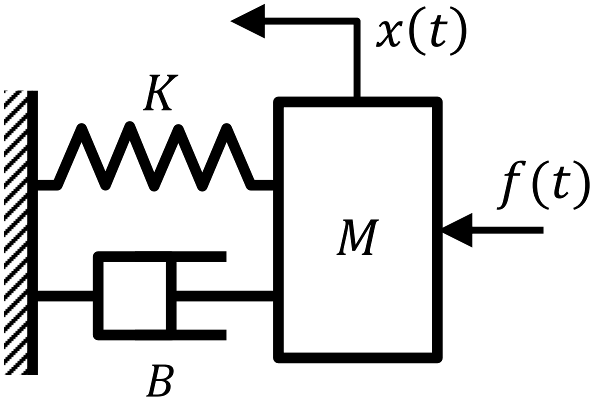
- **Control**





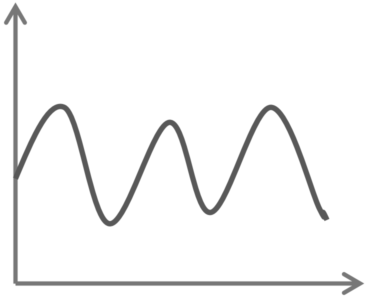
Terminología

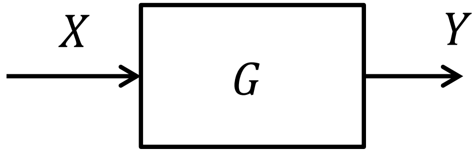
- ***Fenómeno físico***
  - *Manifestación de la **interacción entre partes** de un sistema*
- ***Modelo***
  - *Representación **matemática** de un sistema físico*
- ***Modelado***
  - *Obtención de un **modelo** de un sistema físico*

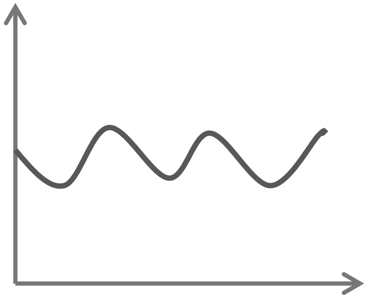


Obtención de modelos

- **Empíricamente** (identificación)
  - Estudios **experimentales**
  - **Observación** de relaciones entrada/salida…
- Características
  - Puede permitir atacar **sistemas complejos** o inaccesibles ☺
  - Podemos **pasar por alto** alguna característica del sistema ☹

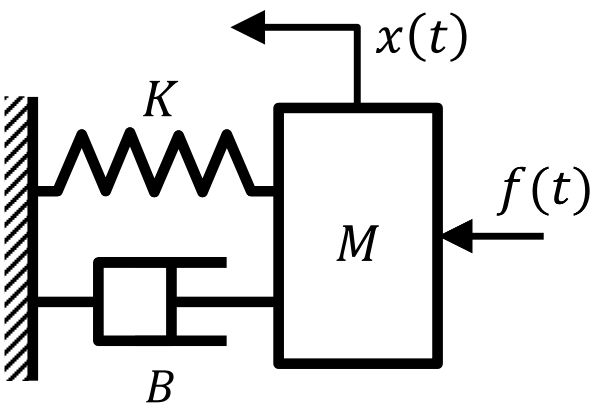






Obtención de modelos

- **Axiomáticamente** (modelado)
  - Obtención de las **ecuaciones** diferenciales que describen el sistema
- Características
  - **Precisión** (si el modelo es correcto) ☺
  - Incertidumbre en tolerancias, linealidades... ☹



$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

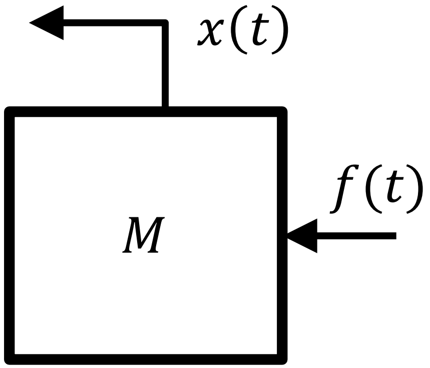
Tipos de sistemas que vamos a modelar

- Sistemas **mecánicos traslacionales**
  - Masa, muelle, amortiguador
- Sistemas **mecánicos rotacionales**
  - Equivalentes rotacionales, engranajes
- Sistemas **eléctricos**
  - Resistencia, bobina, condensador
- **Motor** de corriente continua

Sistemas mecánicos

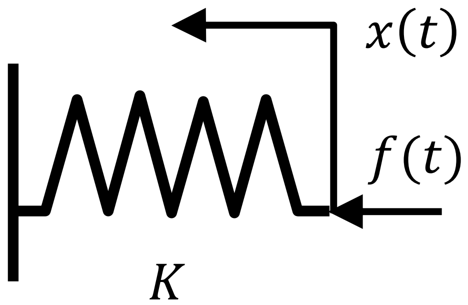
- Leyes de Newton
  - Equilibrio de fuerzas
  - Conservación de momentos
- Hipótesis en el modelado
  - Muelles de **masa nula** y sin límite de estiramiento
  - Amortiguador con **rozamiento lineal viscoso** y masa nula

Sistemas mecánicos traslacionales



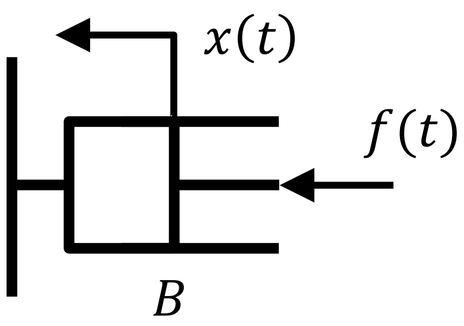
Masa (*Mass*)

$$f(t) = M\ddot{x}(t)$$
$$F(s) = Ms^2X(s)$$



Muelle (*Spring*)

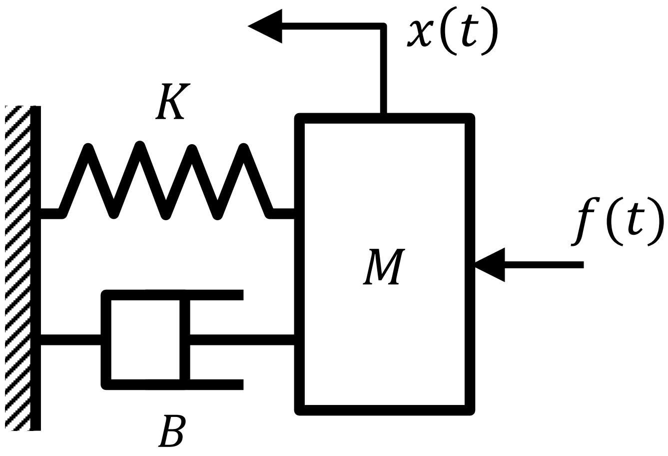
$$f(t) = Kx(t)$$
$$F(s) = KX(s)$$



Amortiguador (*Damper*)

$$f(t) = B\dot{x}(t)$$
$$F(s) = BsX(s)$$

Ejemplo



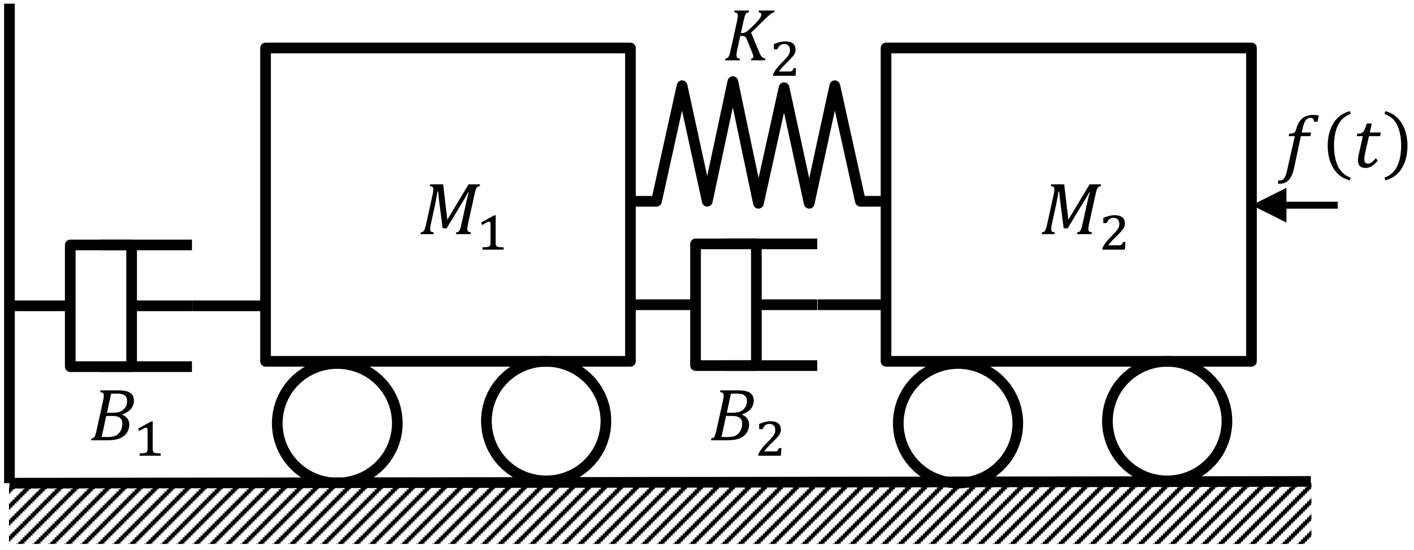
Balance de fuerzas

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

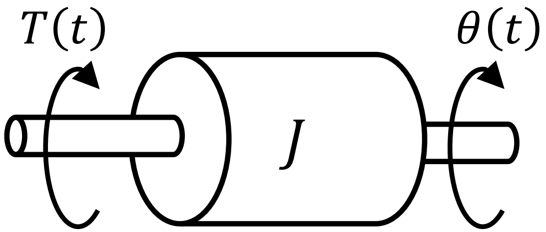
$$F(s) = (Ms^2 + Bs + K)X(s)$$

Ecuación diferencial de **segundo orden, lineal** y con **coeficientes constantes (tiempo invariantes)**

Modelado de un sistema de traslación completo

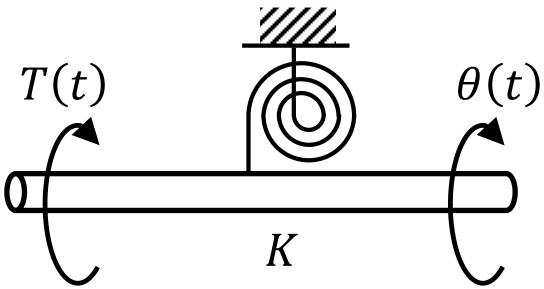


Sistemas mecánicos rotacionales



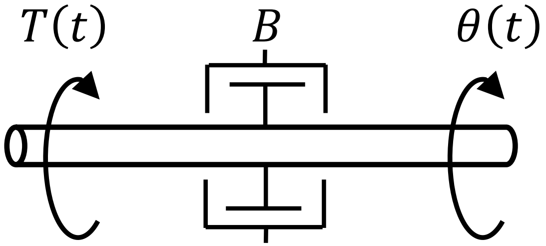
Masa inercial (*Inertia*)

$$T(t) = J\ddot{\theta}(t)$$
$$T(s) = Js^2\Theta(s)$$



Muelle (*Spring*)

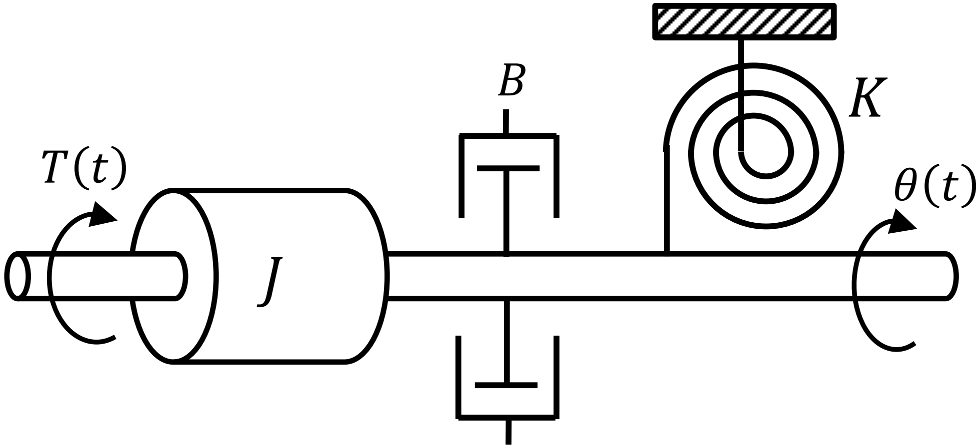
$$T(t) = K\theta(t)$$
$$T(s) = K\Theta(s)$$



Rozamiento viscoso (*Friction*)

$$T(t) = B\dot{\theta}(t)$$
$$T(s) = Bs\Theta(s)$$

Ejemplo



- Rotacional

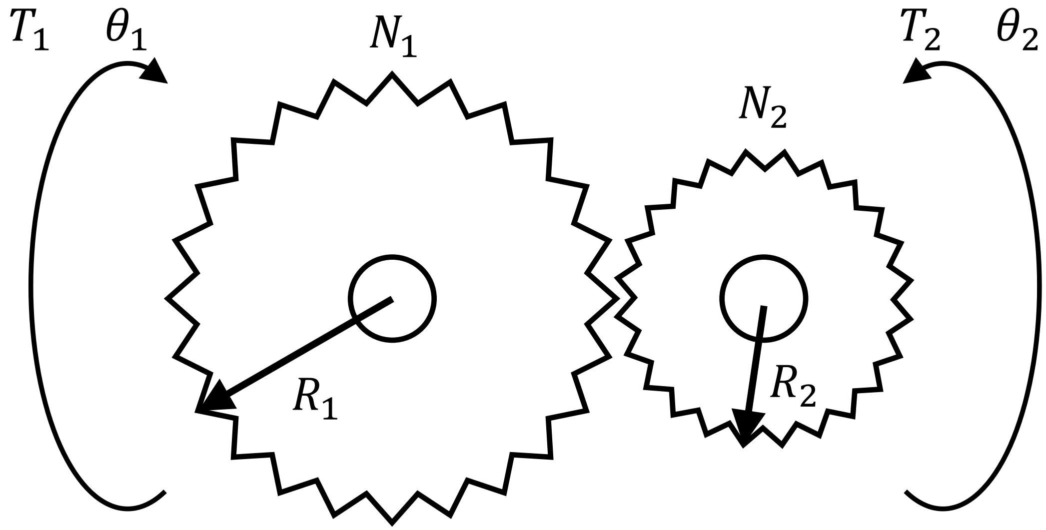
$$T(t) = J\ddot{\theta}(t) + B\dot{\theta}(t) + K\theta(t)$$

- Traslacional

$$f(t) = M\ddot{x}(t) + B\dot{x}(t) + Kx(t)$$

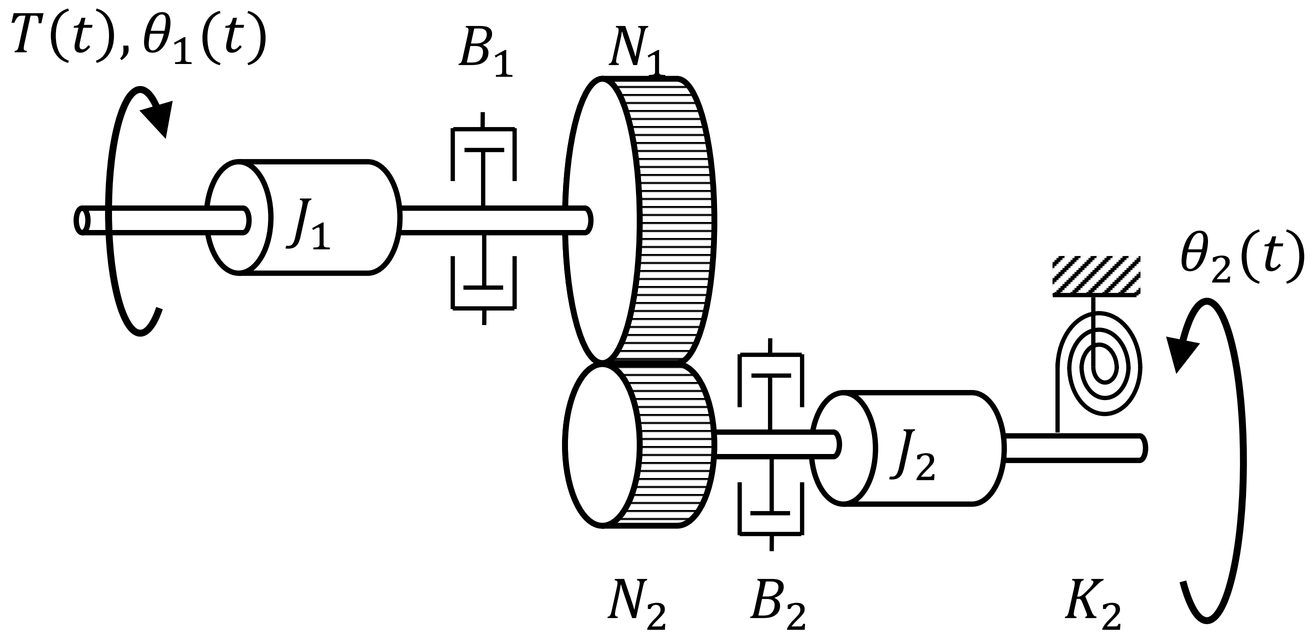
Engranajes

- Transmiten movimiento angular, conservando la potencia pero **transformando el par**



- $\theta_2(t) = \frac{N_1}{N_2}\theta_1(t)$
- $T_2(t) = \frac{N_2}{N_1}T_1(t)$

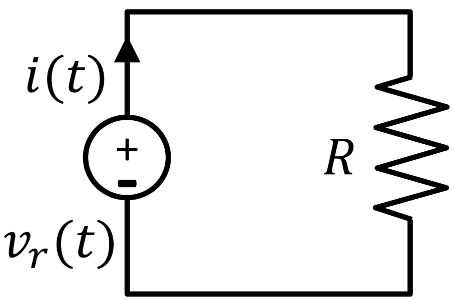
Modelado de un sistema rotacional completo



Sistemas eléctricos

- Leyes de **Kirchhoff**
  - Leyes de mallas y nudos para voltajes e intensidades
- Hipótesis en el modelado
  - No hay **disipación** en los conductores

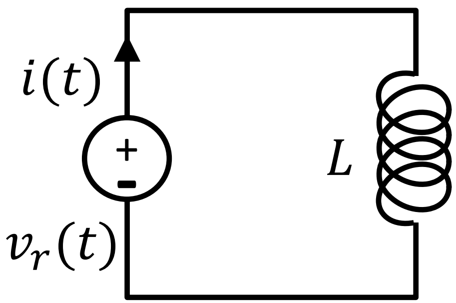
Sistemas eléctricos



Resistencia (*Resistance*)

$$v_r(t) = Ri(t) \Rightarrow V_r(s) = RI(s)$$

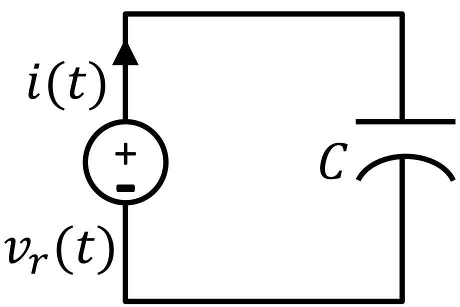
$$i(t) = \frac{v_r(t)}{R} \Rightarrow I(s) = \frac{V_r(s)}{R}$$



Bobina (*Coil, Inductor*)

$$v_r(t) = Li'(t) \Rightarrow V_r(s) = LsI(s)$$

$$i(t) = \frac{\int v_r(t)\,dt}{L} \Rightarrow I(s) = \frac{V_r(s)}{Ls}$$



Condensador (*Capacitor*)

$$v_r(t) = \frac{\int i(t)\,dt}{C} \Rightarrow V_r(s) = \frac{I(s)}{Cs}$$

$$i(t) = C{v_r}'(t) \Rightarrow I(s) = CsV_r(s)$$

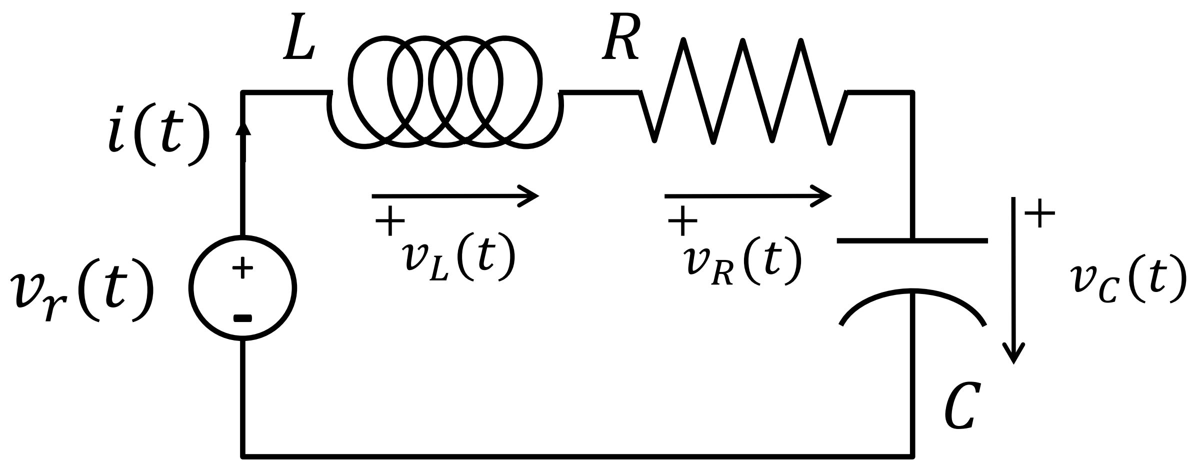
Ley de Kirchhoff para mallas

- En un lazo cerrado la suma de las caídas de tensión es igual a la tensión suministrada

$$v_r(t) - v_R(t) - v_L(t) - v_C(t) = 0$$

$$v_r(t) - Ri(t) - Li'(t) - \frac{\int i(t)dt}{C} = 0$$

$$V_r(s) = \frac{LCs^2 + RCs + 1}{Cs} I(s)$$



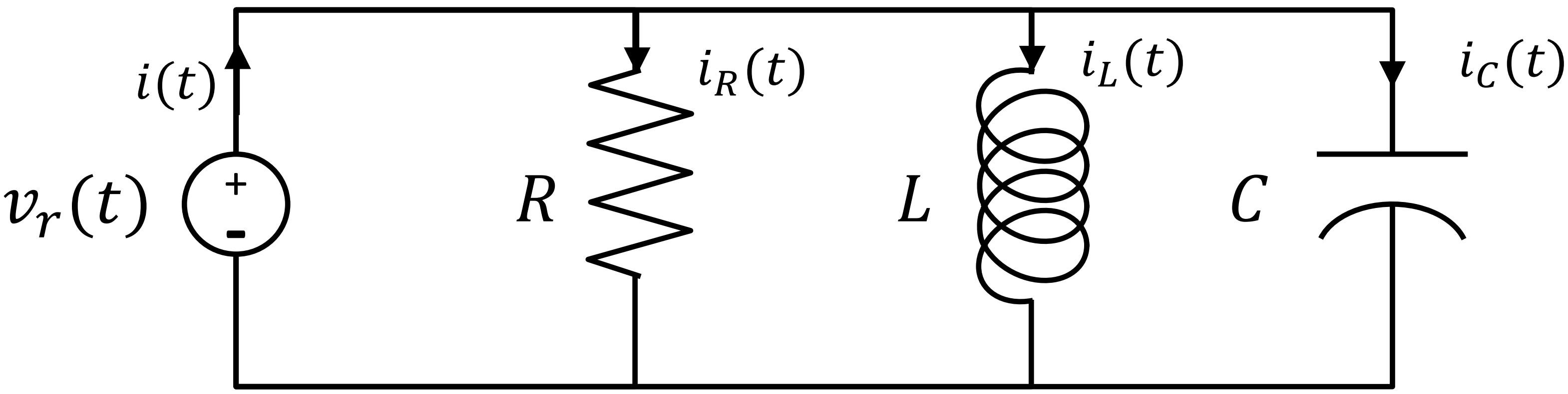
Ley de Kirchhoff para nudos

- La suma de las corrientes entrantes en un nudo es igual a la suma de corrientes salientes

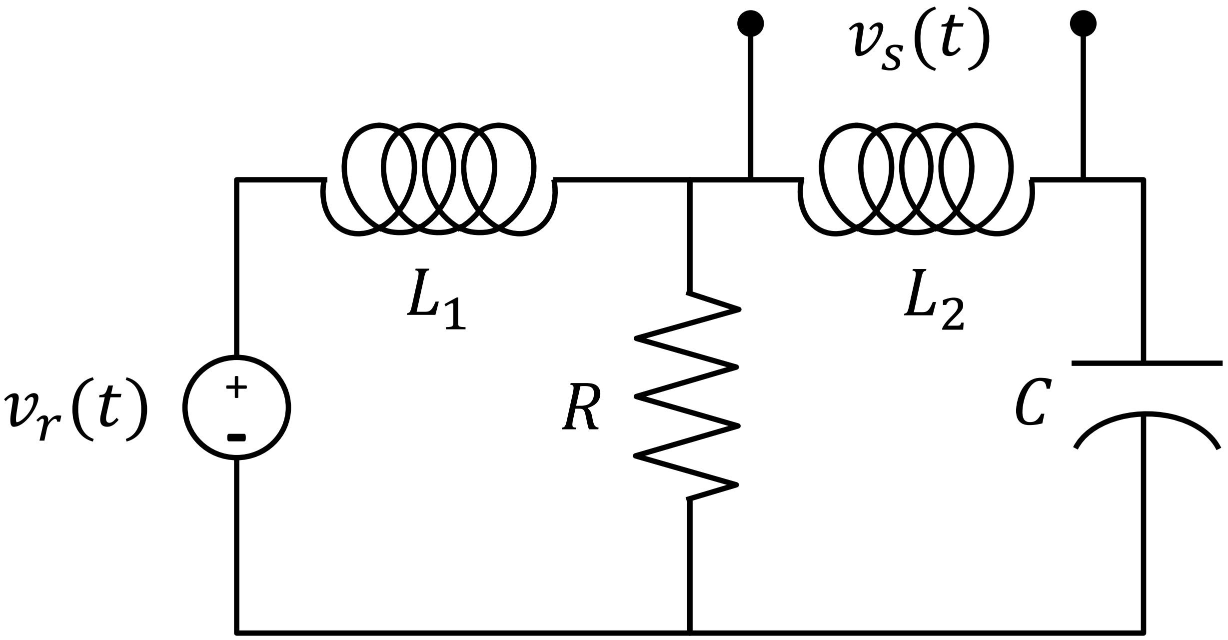
$$i(t) = i_R(t) + i_L(t) + i_C(t)$$

$$i(t) = \frac{v_r(t)}{R} + \frac{\int v_r(t)dt}{L} + Cv_r'(t)$$

$$I(s) = \frac{RLCs^2 + Ls + R}{RLs} V_r(s)$$

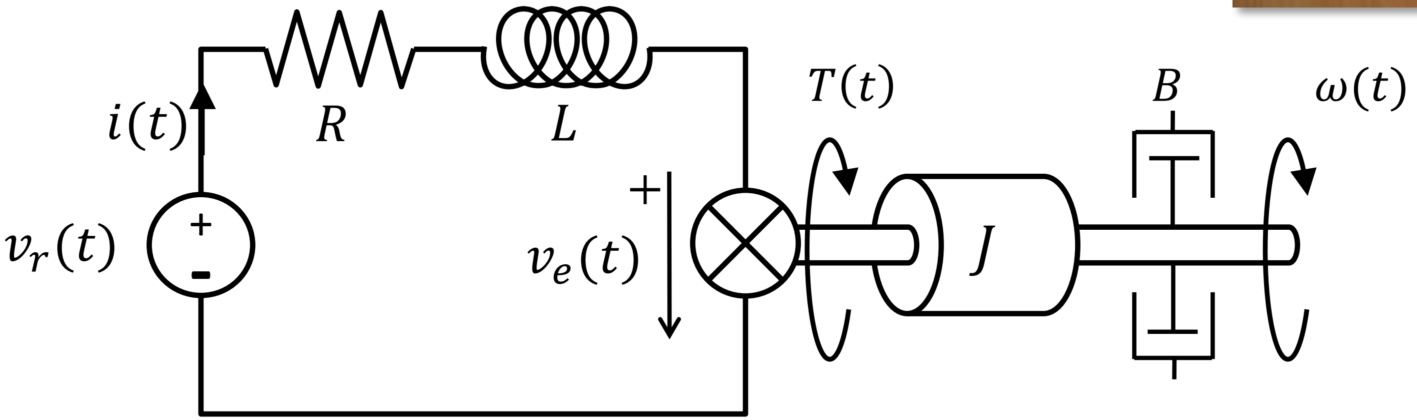


Modelado de un sistema eléctrico completo



El motor eléctrico

- Modelado de un motor eléctrico



- Relaciones entre parte **mecánica** y **eléctrica**
  - $T(t) = K_i i(t)$
  - $v_e(t) = K_e \omega(t)$

El motor eléctrico

- Modelado del circuito eléctrico

$$v_r(t) = Ri(t) + Li'(t) + v_e(t) \Rightarrow$$
$$V_r(s) = (Ls + R)I(s) + V_e(s)$$

- Modelado del sistema rotacional

$$T(t) = J\omega'(t) + B\omega(t) \Rightarrow \; T(s) = (Js + B)\Omega(s)$$

- Relación entre la intensidad y el par

$$T(t) = K_i i(t) \Rightarrow T(s) = K_i I(s)$$

- Relación entre la fuerza contra-electromotriz y la velocidad de giro

$$v_e(t) = K_e\omega(t) \Rightarrow V_e(s) = K_e\Omega(s)$$

Relación entre la entrada y la salida

- Relación fuente de voltaje y velocidad de giro
  - Sistema lineal de 4 ecuaciones
  - Despejando

$$\Omega(s) = \frac{Ki}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_e K_i} V_r(s)$$

- Similitud con los sistemas vistos anteriormente
  - Función de s que relaciona dos variables
  - Compuesta por una fracción de dos polinomios

Función de Transferencia

La **función de transferencia** (*transfer function, FdT*) se define como el **cociente** entre la $\mathcal{L}$ de la salida y la $\mathcal{L}$ de la entrada del sistema

$$FdT = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[r(t)]} = \frac{Y(s)}{R(s)} = G(s)$$

Siendo $r(t)$ la señal de entrada e $y(t)$ la señal de salida

Función de Transferencia

- Ejemplo anterior

$$\Omega(s) = \frac{K_i}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_e K_i} V_r(s)$$

- **Entrada:**

$$v_r(t) \Rightarrow \mathcal{L}[v_r(t)] = V_r(s)$$

- **Salida:**

$$\omega(t) \Rightarrow \mathcal{L}[\omega(t)] = \Omega(s)$$

- **Función de transferencia:**

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_r(s)} = \frac{K_i}{LJs^2 + (RJ + LB)s + RB + K_e K_i}$$

Definición de una FdT en MatLab

- Definición mediante coeficientes

```
G = tf([1 2],[1 4 4])
Transfer function:
    s + 2
-------------
s^2 + 4 s + 4
```

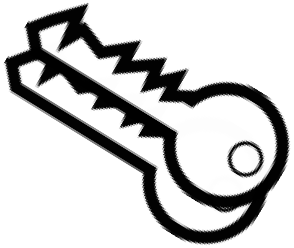
$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+4s+4}$$

- Definición mediante variable auxiliar *s*

```
s = tf('s');
G = (s+1)/(s^2+3*s+4)
Transfer function:
    s + 1
-------------
s^2 + 3 s + 4
```

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+3s+4}$$

Polos y ceros



- Las **raíces** del numerador de la FdT se llaman **ceros**
- Las **raíces** del denominador se llaman **polos**

Ejemplo:

$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Raíces de $N(s) = s^2 + 3s + 2 \rightarrow$ **ceros**

  z_1 en $s = -2$, $\qquad z_2$ en $s = -1$

- Raíces de $D(s) = s^2 + 2s + 1 \rightarrow$ **polos**

  p_1 en $s = -1$, $\qquad p_2$ en $s = -1$

Representación de polos y ceros

$$G(s) = \frac{s^2+3s+2}{s^2+2s+1} = \frac{(s+2)(s+1)}{(s+1)^2} = \frac{(s+z_1)(s+z_2)}{(s+p_1)^2}$$

- **Ceros**

$$z_1 \text{ en } s = -2, \qquad z_2 \text{ en } s = -1,$$

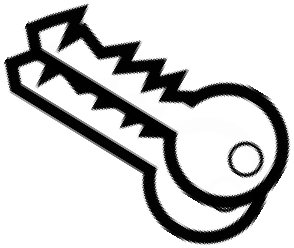
De forma equivalente

$$z_1 = 2, \qquad z_2 = 1$$

<u>nunca</u>

$$\cancel{z_1 = -2, \qquad z_2 = -1}$$

- **¿Polos?**



Polos y ceros

- Los polos y ceros pueden ser
  - **Sencillos**
  - **Múltiples** (multiplicidad > 1)
  - **Complejos** y conjugados
- *Ejemplo*:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5}$$

- Polos en:

$$s = -1 \pm 2i$$

```
G(s) := 1/(s^2 + 2*s + 5);
solve(s^2 + 2*s + 5 = 0);
```

```
s = tf('s');
G = 1/(s^2 + 2*s + 5);
pole(G)
zero(G)
roots([1 2 5])
```

FdT propias e impropias

- Se define **orden** de la FdT el **grado** de $D(s)$

Ejemplo:

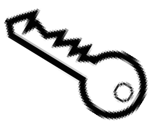
$$G(s) = \frac{s^2 + 3s + 2}{s^2 + 2s + 1} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

- Si el **grado** de $D(s)$ es
  - **Mayor** que el de $N(s)$
    la FdT es **estrictamente propia**
  - **Igual** que el de $N(s)$ la FdT es **propia**
  - **Menor** que el de $N(s)$ la FdT es **impropia**

Propiedades de la FdT

1. Es un **método operacional** para relacionar la entrada con la salida mediante un **modelo matemático**

$$G(s)$$

2. Es una **propiedad del sistema**, independiente de la magnitud y naturaleza de la entrada 
3. Incluye las unidades necesarias para relacionar la entrada con la salida, pero **no proporciona información física** del sistema

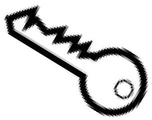
$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \stackrel{?}{=} \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \stackrel{?}{=} \frac{1}{Js^2 + Bs + K}$$

Propiedades de la FdT

4. Si se conoce la FdT, se puede **estudiar la salida** del sistema ante **distintas señales de entrada**

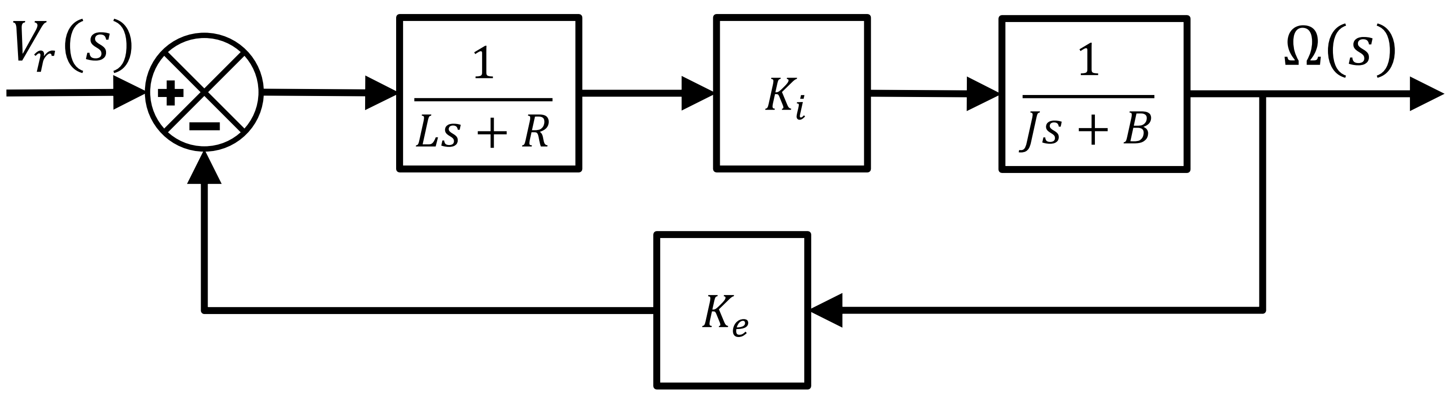
5. Si se desconoce la FdT, puede **establecerse experimentalmente** introduciendo entradas conocidas y estudiando la salida del sistema

6. Se puede definir **solo** para sistemas **lineales tiempo invariantes**



Sistemas como diagrama de bloques

- Podemos representar el sistema mediante un **diagrama de bloques**
- Varias salidas con múltiples ecuaciones
- Descripción del sistema como **interconexión** de **bloques sencillos**

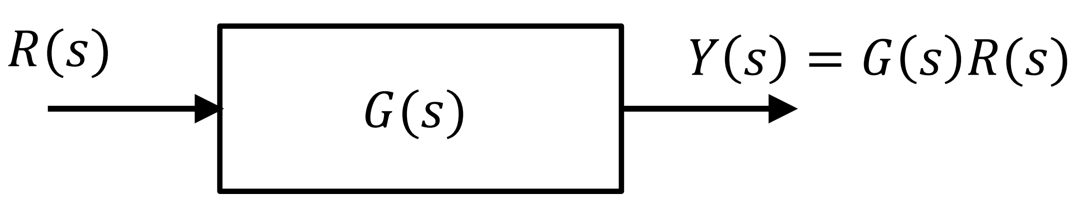


Elementos en el diseño de bloques

- **Señal**
  - Magnitud que se propaga en las interconexiones
    - Sin unidades físicas
    - Con posible correspondencia física

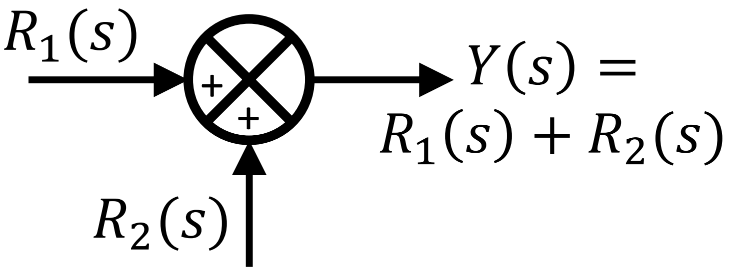
$$\xrightarrow{R(s)}$$

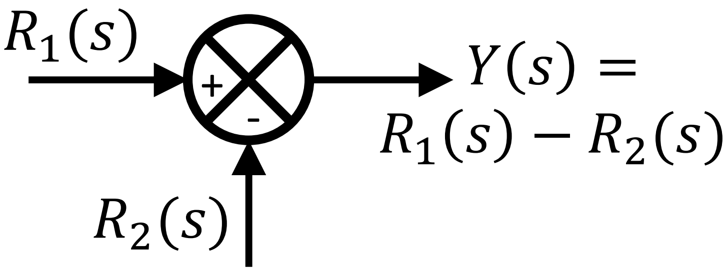
- **Bloque**
  - Cada bloque representa una **función de transferencia**



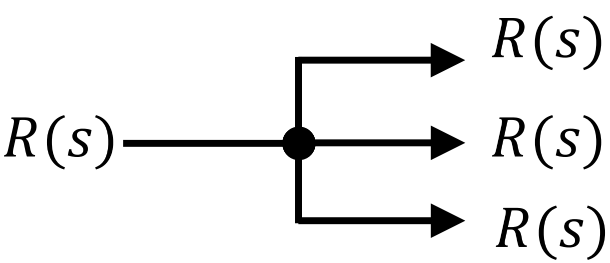
Elementos en el diseño de bloques

- Sumador/restador de señales

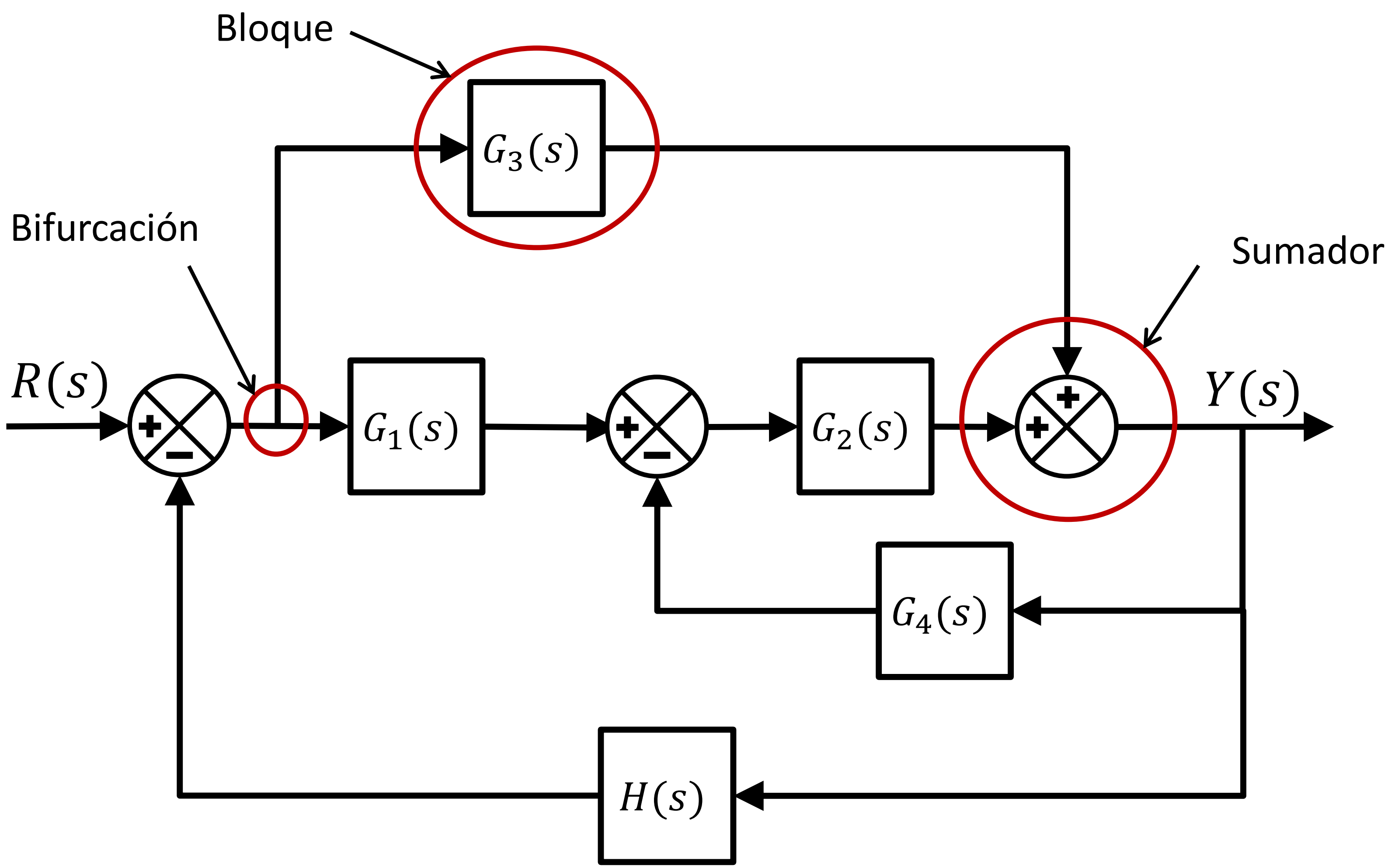




- Bifurcación de señal



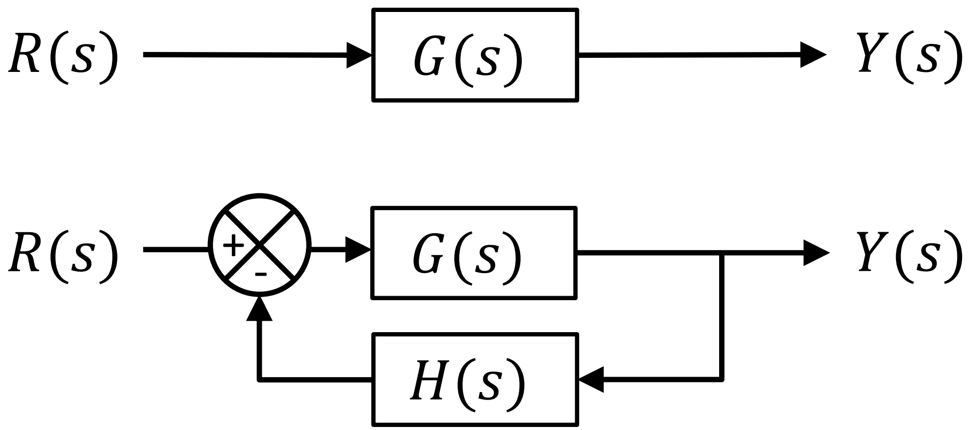
Ejemplo de diagrama de bloques



$$¿\,G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}?$$

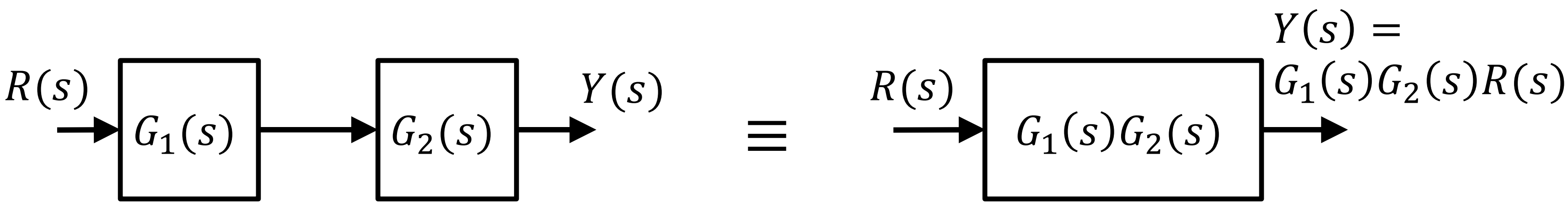
Simplificación de diagramas de bloques

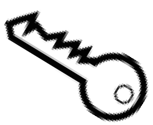
- Un mismo sistema se puede representar con **diferentes diagramas de bloques**
- Permite
  - Obtener la FdT de una salida del sistema
  - Realizar una **simplificación** usando **equivalencias**
  - Llegar a una configuración de la forma

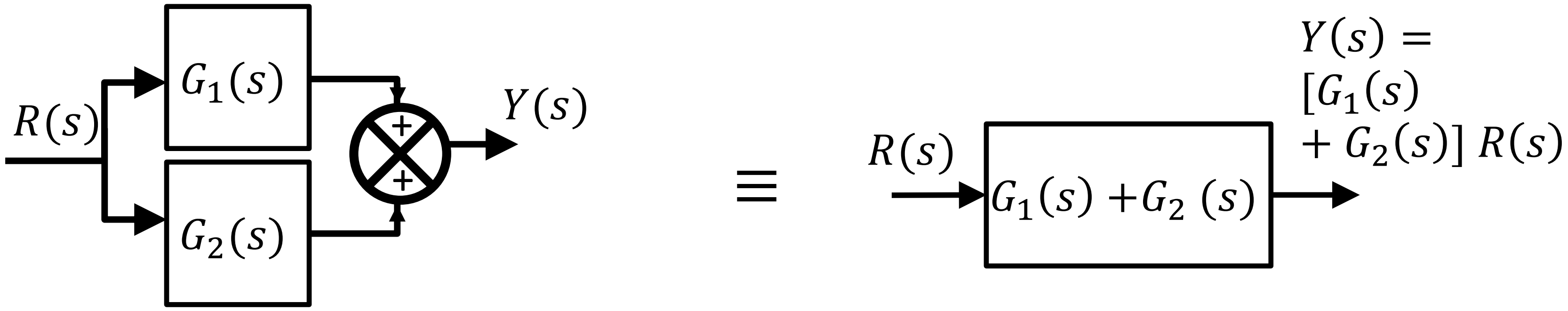


Simplificación de diagramas de bloques

- Equivalencia bloques en **serie**

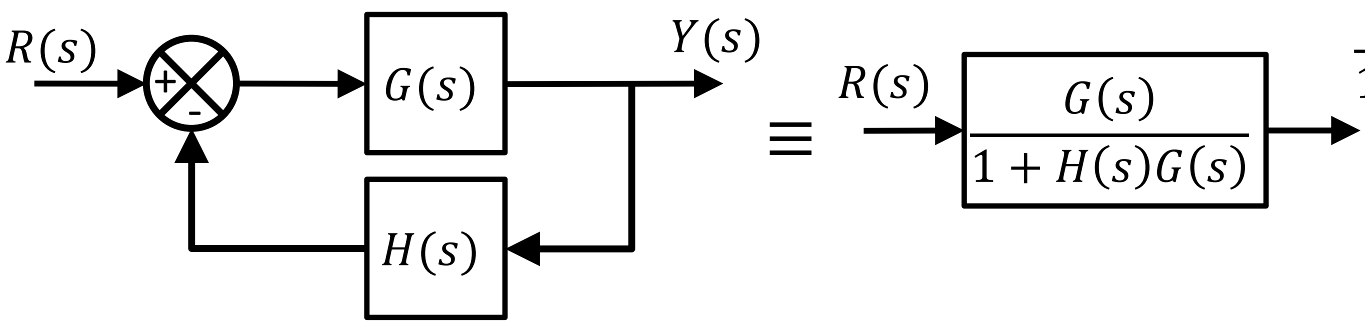


- Equivalencia bloques en **paralelo** 



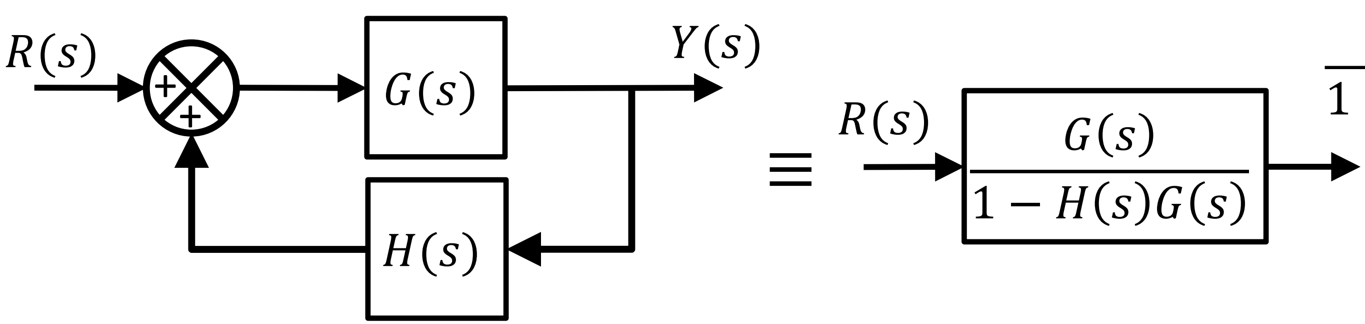
Simplificación de diagramas de bloques

- Bloques en **realimentación negativa**



$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+H(s)G(s)} R(s)$$

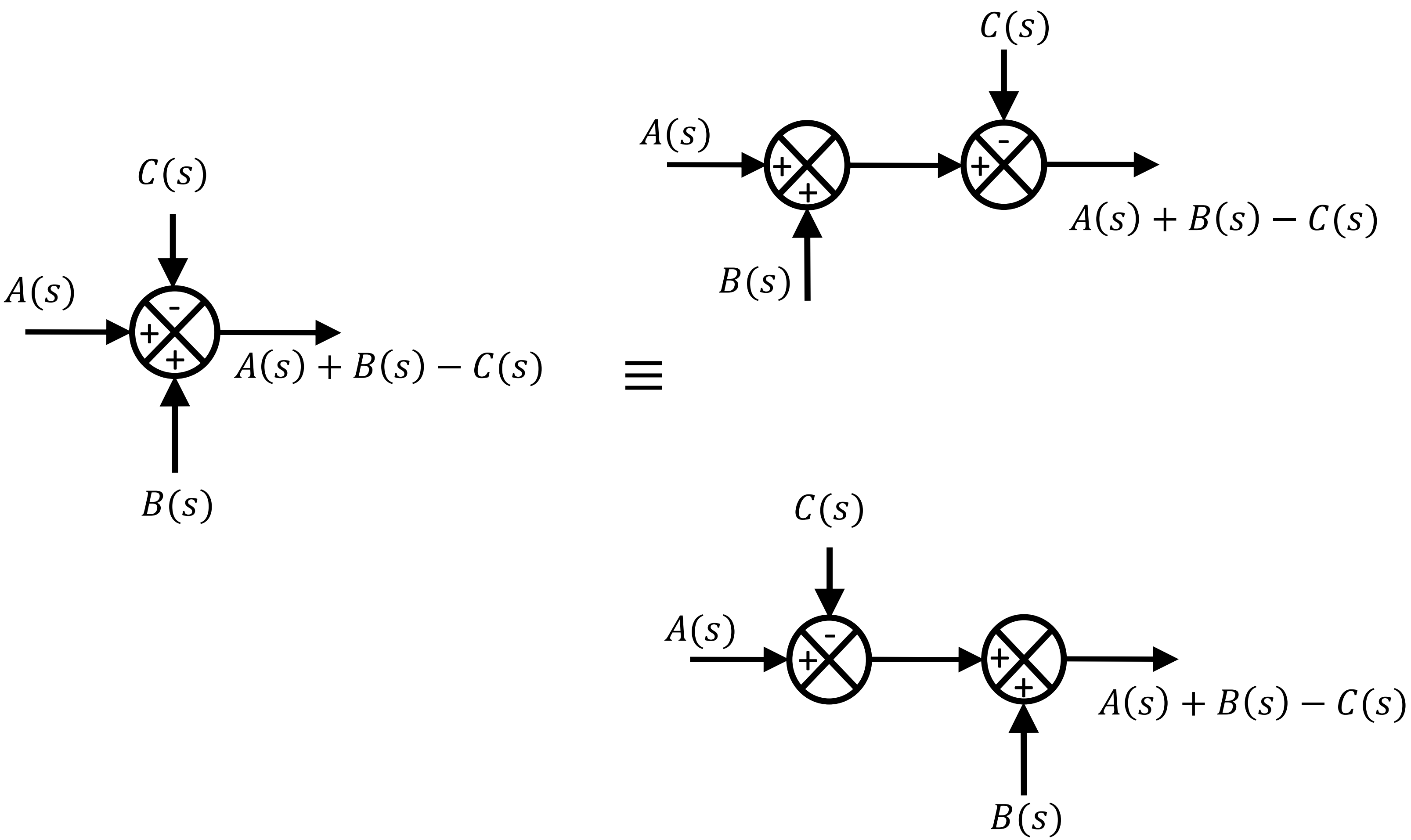
- Bloques en **realimentación positiva**



$$Y(s) = \frac{G(s)}{1-H(s)G(s)} R(s)$$

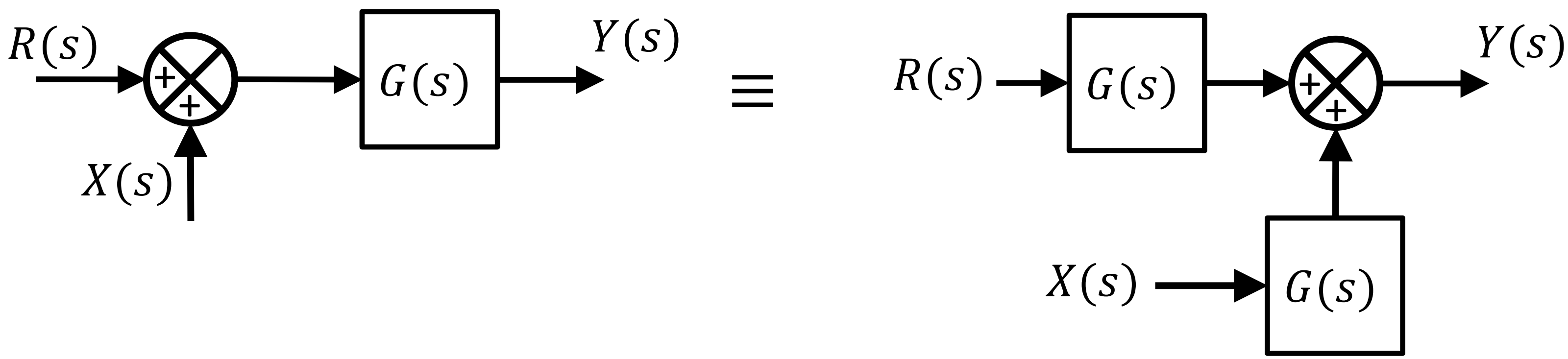
Simplificación de diagramas de bloques

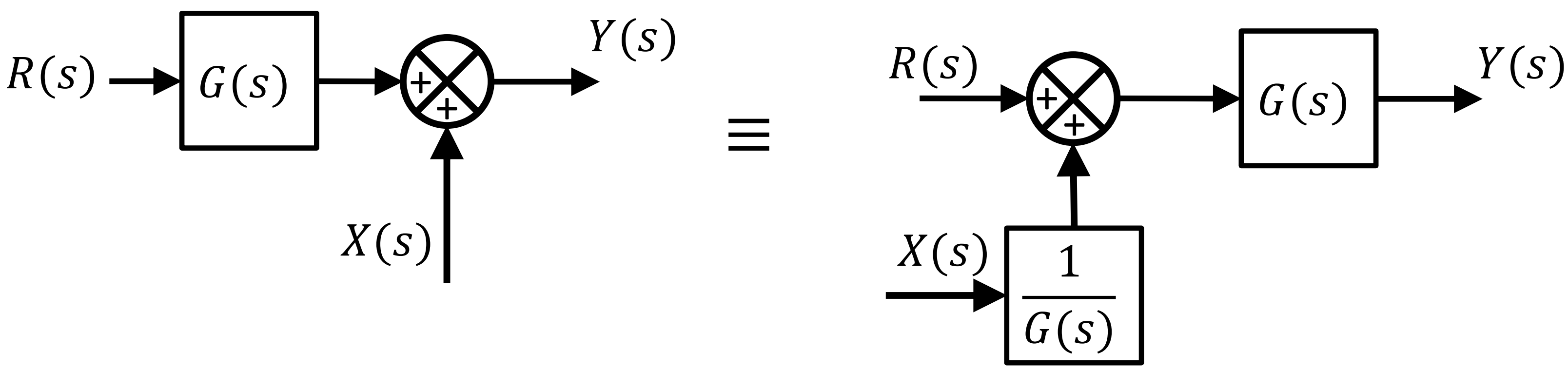
- **Intercambio** de sumadores



Simplificación de diagramas de bloques

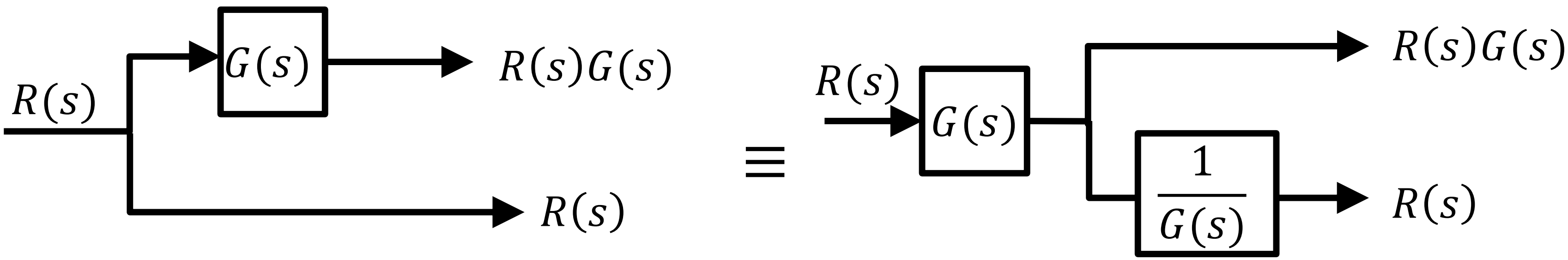
- **Desplazamientos** de bloques con **sumadores**

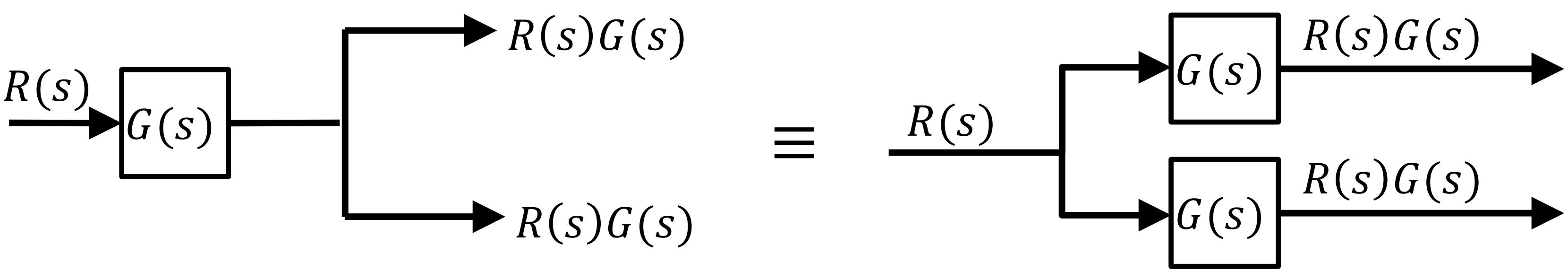




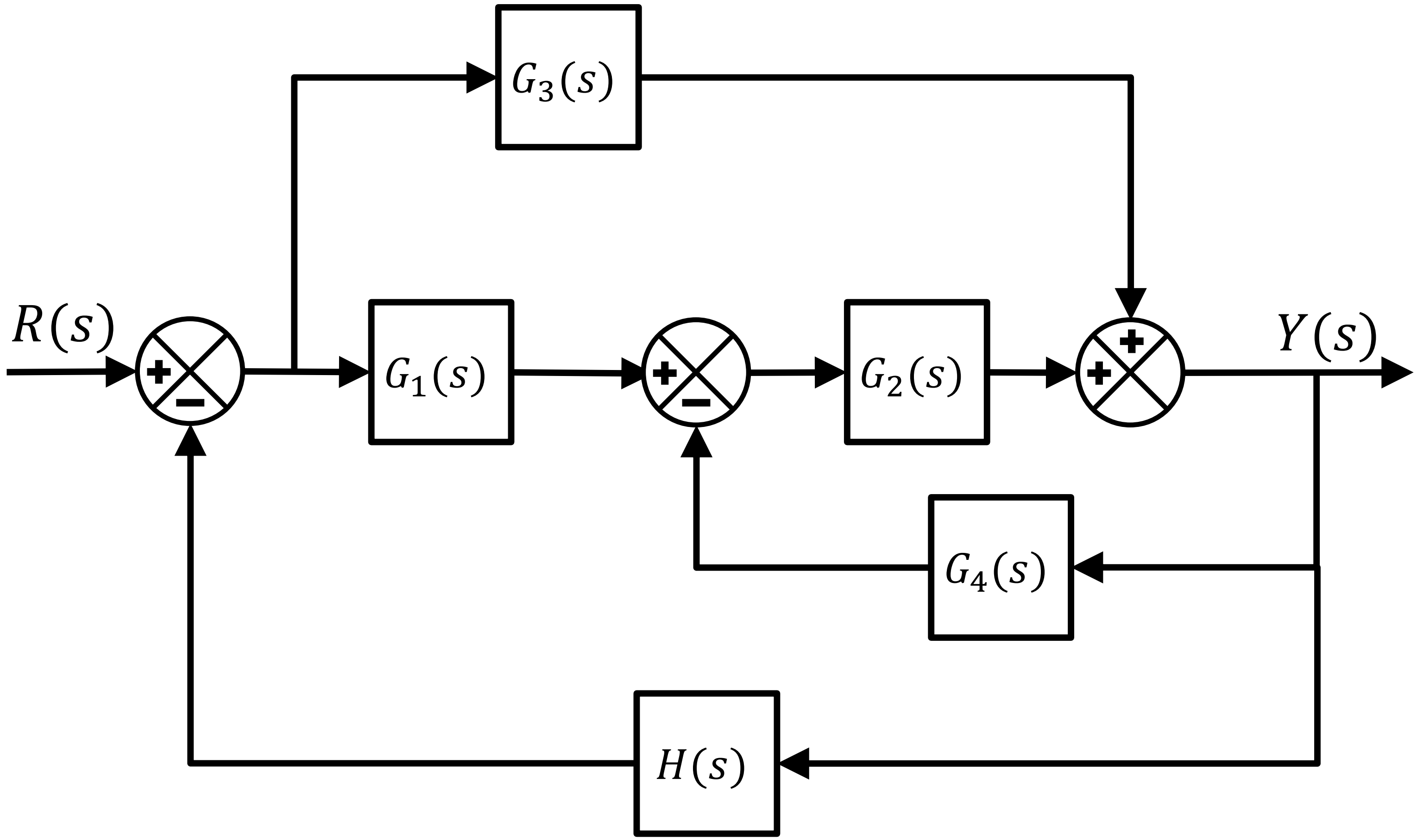
Simplificación de diagramas de bloques

- **Desplazamientos** de bloques con **bifurcaciones**





Simplificación de un sistema complejo



Resumen

- **Modelado de sistemas mecánicos**
  - Descripción matemática de sistemas compuestos por masas, muelles y amortiguadores
  - Aplicación de las leyes de Newton
  - Equivalentes rotacionales y uso de engranajes
- **Modelado de sistemas eléctricos**
  - Descripción matemática de circuitos eléctricos
  - Aplicación de las leyes de Kirchhoff
- **Modelado de un sistema completo**
  - Descripción del motor de CC
  - Relaciones intensidad-par y voltaje-velocidad

Resumen

- **Función de Transferencia**
  - Relación entre la entrada y la salida de un sistema
  - Información importante en el estudio de sistemas
  - Conocer las principales propiedades de una FdT
- **Representación mediante diagramas de bloques**
  - Técnica gráfica mediante interconexión de FdT's
  - Principales elementos en el diseño
    - Bloques, sumas/restas y bifurcaciones
  - Bloques en serie, paralelo y realimentación
  - Simplificación de diagramas
    - Principales equivalencias